Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

**РГР3+КР3**

по дисциплине «Линейная алгебра»

Выполнили: Мироненко Артем

Гаврилович Вероника

Карагодина Ксения

Логинова Ольга

Поток 10.2

Научный руководитель:

Блейхер Оксана Владимировна

Сант-Петербург

~2023~

Оглавление

[Задание 1 3](#_Toc154741622)

[Задание 2 3](#_Toc154741623)

[Задание 3 4](#_Toc154741624)

[Задание 4 4](#_Toc154741625)

[Задание 5 7](#_Toc154741626)

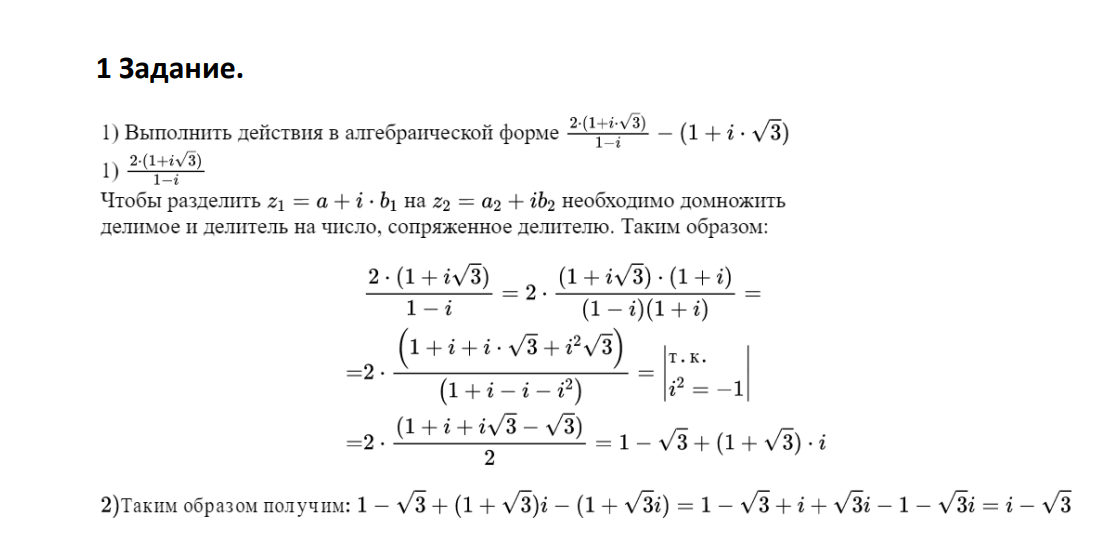
[Задание 6 11](#_Toc154741627)

[Задание 7 13](#_Toc154741628)

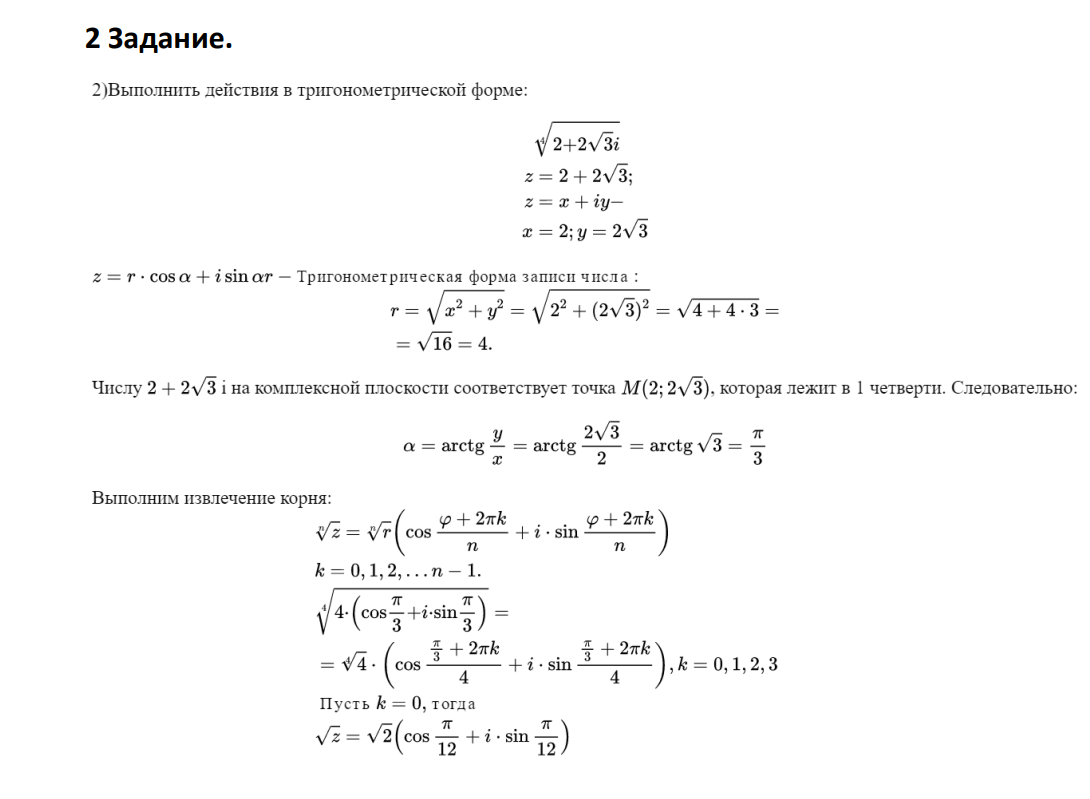
[Задание 8 14](#_Toc154741629)

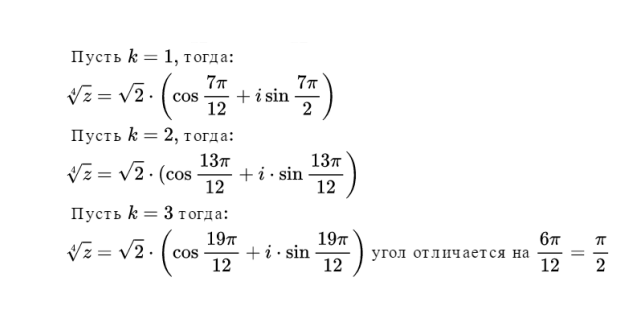
[Задание 9 15](#_Toc154741630)

## Задание 1

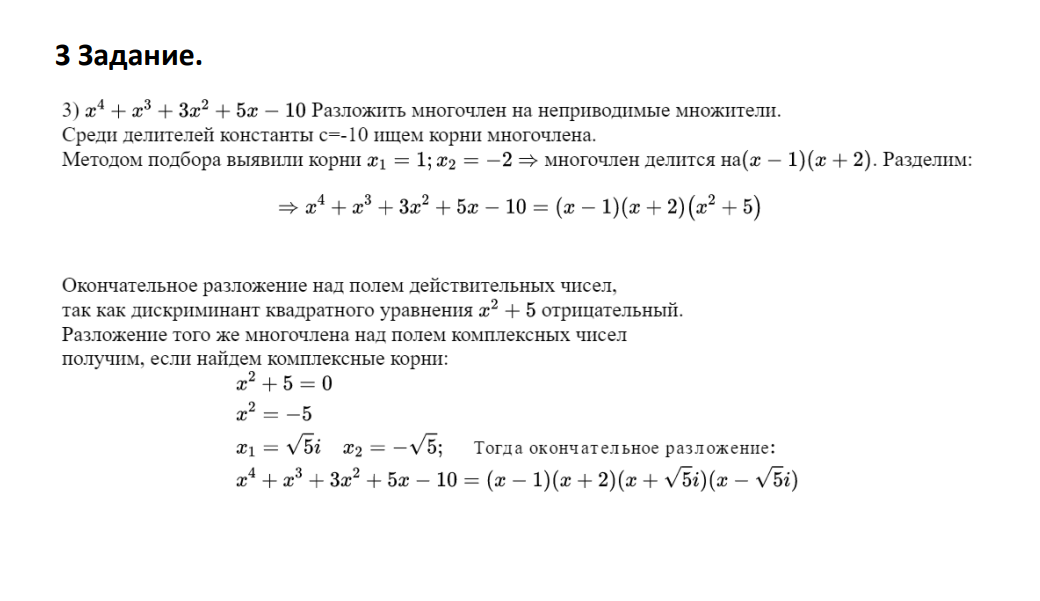


## Задание 2





## Задание 3



## Задание 4

Пользуясь свойствами определителей вычислить:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | 9 | -2 | -4 | 5 |
| 2 | -3 | 4 | -3 | 3 |
| 5 | 7 | -2 | -4 | 2 |
| 4 | -5 | 8 | -6 | 8 |
| 6 | -5 | 3 | -3 | 7 |

**Свойства определителей**

При транспонировании величина определителя не меняется.



Строки и столбцы определителя эквиваленты.

Если в определители поменять местами какие-либо две строки (столбца) местами, то определитель меняет знак.



Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен 0.

При умножении элементов какого-либо столбца (строки) на число a, определитель умножается на это число.



Если все элементы какого-либо столбца (строки) равны 0 , то определитель равен 0.

Если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен 0.



Пусть каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя равен сумме двух слагаемых, тогда этот определитель равен сумме двух определителей, причём в первом их них соответствующий столбец (строка) состоит из первых слагаемых, а во втором - из вторых слагаемых.



Определитель не изменится, если к элементам какого-либо столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца умноженного на одно и тоже число.



Сумма произведений элементов какого-либо столбца определителя на алгебраического дополнения к элементам другого столбца равна 0.

Решение:

Сводим матрицу к треугольному виду:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 14 | -10 | 2 | -3 |  |
| 0 | -31 | 24 | -7 | 9 |  |
| 0 | -63 | 48 | -16 | 17 | → |
| 0 | -61 | 48 | -14 | 20 |  |
| 0 | -89 | 63 | -15 | 25 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 14 | -10 | 2 | -3 |  |
|  | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |  |
| - | 0 | -63 | 48 | -14 | 17 | → |
|  | 0 | -31 | 24 | -7 | 9 |  |
|  | 0 | -89 | 63 | -15 | 25 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 14 | -10 | 2 | -3 |  |
|  | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |  |
| - | 0 | 0 | 48 | -14 | 143 | → |
|  | 0 | 0 | 24 | -7 | 71 |  |
|  | 0 | 0 | 63 | -15 | 203 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 14 | 2 | -10 | -3 |  |
|  | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |  |
| - | 0 | 0 | -14 | 48 | 143 | → |
|  | 0 | 0 | -7 | 24 | 71 |  |
|  | 0 | 0 | -15 | -63 | 203 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 14 | 2 | -10 | -3 |  |
|  | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |  |
|  | 0 | 0 | 1 | -15 | -60 | → |
|  | 0 | 0 | -7 | 24 | 71 |  |
|  | 0 | 0 | -15 | 63 | 203 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 14 | 2 | -10 | -3 |  |
|  | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |  |
|  | 0 | 0 | 1 | -15 | -60 | → |
|  | 0 | 0 | 0 | -81 | -349 |  |
|  | 0 | 0 | 0 | -162 | -697 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 14 | 2 | -10 | -3 |  |
|  | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |  |
|  | 0 | 0 | 1 | -15 | -60 | → |
|  | 0 | 0 | 0 | -81 | -349 |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |  |

= 1 \* 1 \* 1 \* (-81) \* 1 = -81

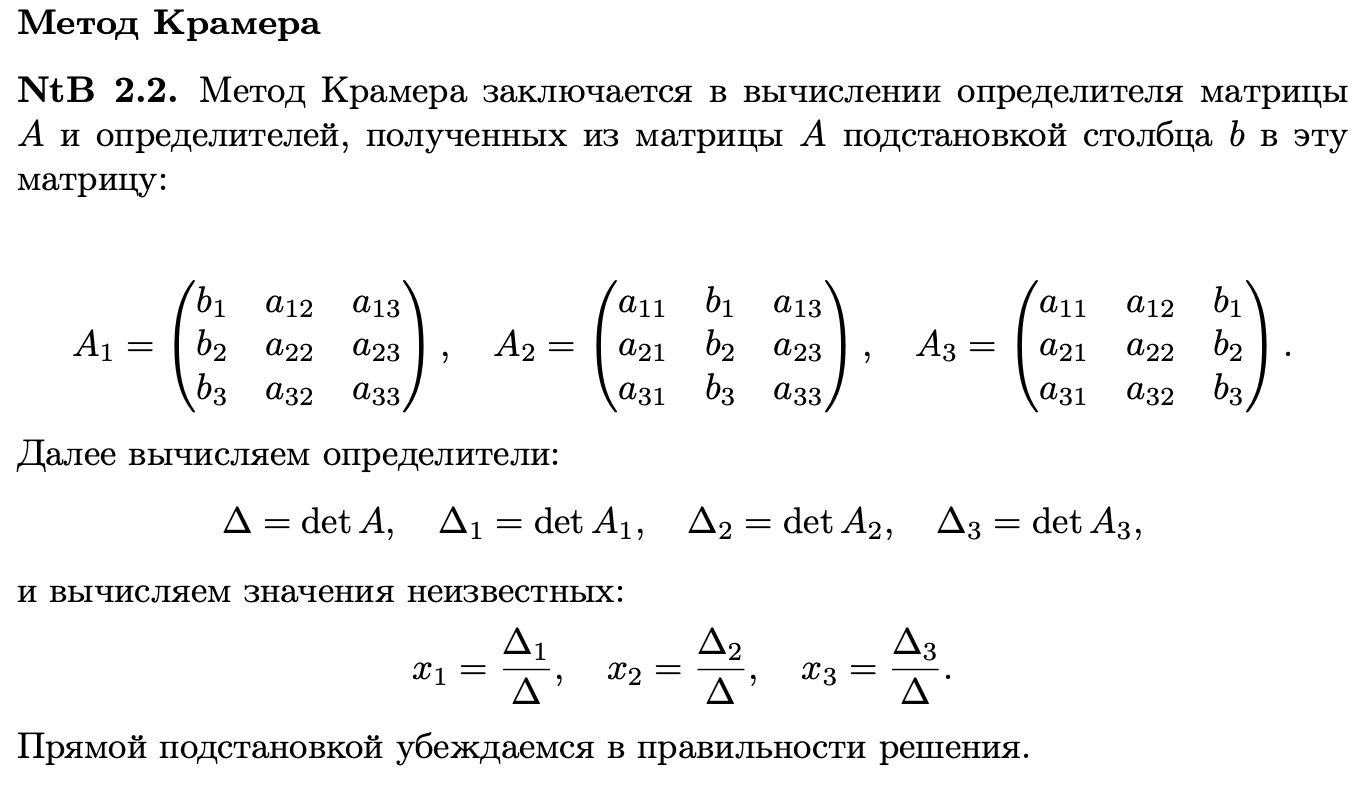
Ответ: -81

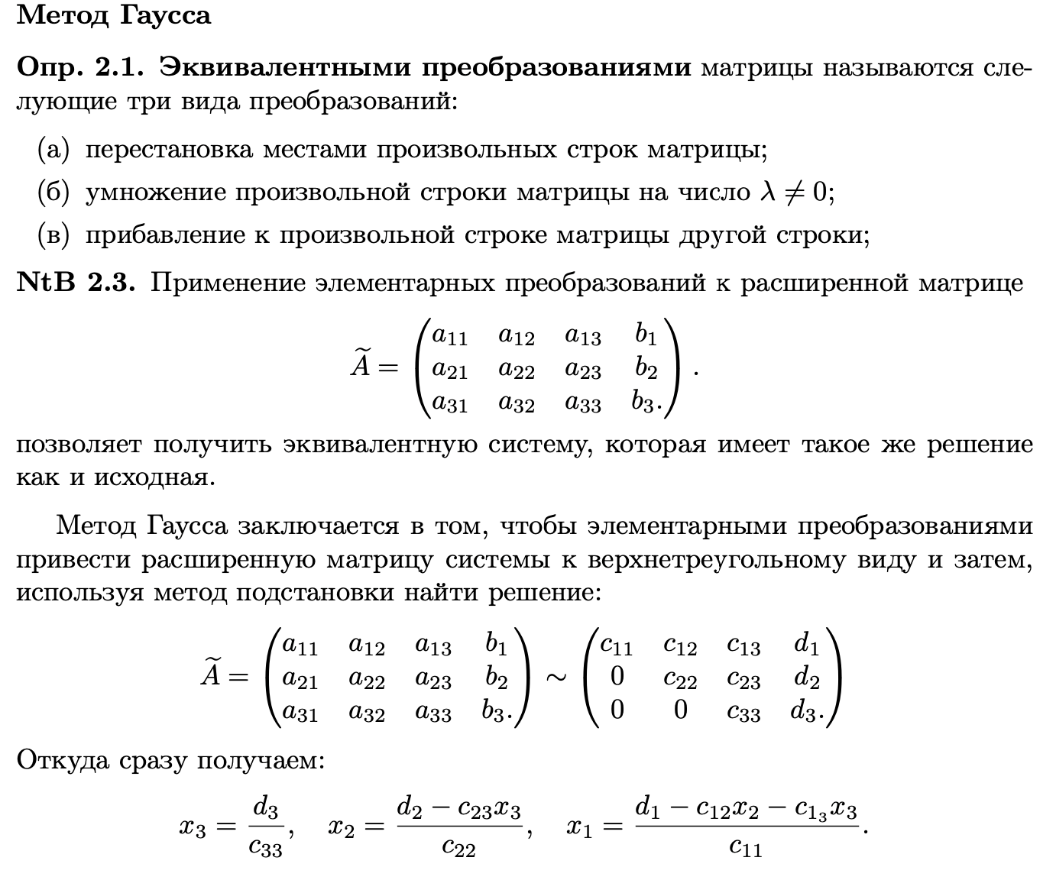
## Задание 5

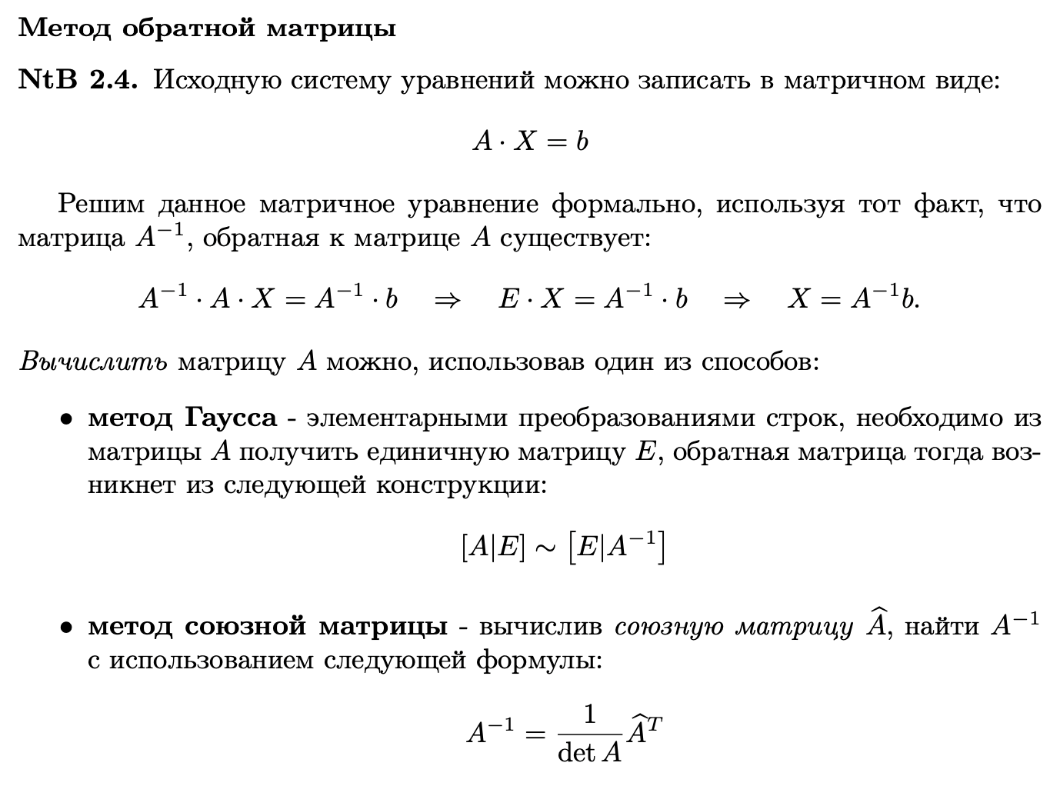
Доказать совместность системы:

и решить ее  
а) методом Гаусса,  
б) методом Крамера,  
в) в матричном виде

Теория:







1. **Метод Гаусcа**

Ответ : x = -1, y = 5, z = 2.

**б) Метод Крамера**

Ответ: x = -1, y = 5, z = 2.

**в) в матричном виде**

, – матрица алгебраических дополнений

Ответ: x = -1, y = 5, z= 2

## Задание 6

Найти общее решение, частное решение и– фундаментальную систему решений данной системы уравнений

Решение

1. Выпишем основную матрицу системы:

Приведем матрицу к треугольному виду. Будем работать только со строками, так как умножение строки матрицы на число, отличное от нуля, и прибавление к другой строке для системы означает умножение уравнения на это же число и сложение с другим уравнением, что не меняет решения системы.

Умножим 1-ую строку на (-2). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

Умножим 2-ую строку на (-1). Умножим 3-ую строку на (2). Добавим 3-ую строку к 2-ой:

Умножим 1-ую строку на (7). Умножим 2-ую строку на (5). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

Найдем ранг матрицы.

Выделенный минор имеет наивысший порядок (из возможных миноров) и отличен от нуля (он равен произведению элементов, стоящих на обратной диагонали), следовательно **rang(A) = 3.**

Этот минор является базисным. В него вошли коэффициенты при неизвестных x1,x2,x3, значит, неизвестные x1,x2,x3 – зависимые (базисные), а x4,x5 – свободные.  
Преобразуем матрицу, оставляя слева только базисный минор.

Система с коэффициентами этой матрицы эквивалентна исходной системе и имеет вид:

- 34x3 = 114x4 + 18x5  
7x2 + 3x3 = 13x4 + 5x5  
x1 + 3x2 - x3 = 6x4 + x5

Методом исключения неизвестных находим **нетривиальное решение**:  
Получили соотношения, выражающие зависимые переменные x1,x2,x3 через свободные x4,x5, то есть нашли **общее решение**:

1. Придавая свободным неизвестным любые значения, получим сколько угодно частных решений.

1. Находим фундаментальную систему решений, которая состоит из (n-r) решений.

В нашем случае n=5, r=3, следовательно, фундаментальная система решений состоит из 2-х решений, причем эти решения должны быть линейно независимыми.  
Чтобы строки были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, составленной из элементов строк, был равен количеству строк, то есть 2.

Достаточно придать свободным неизвестным x4,x5 значения из строк определителя 2-го порядка, отличного от нуля, и подсчитать x1,x2,x3.

Простейшим определителем, отличным от нуля, является единичная матрица.

## Задание 7

**Образуют ли линейное пространство множество целых чисел?**

Да, множество целых чисел образует линейное пространство над полем вещественных чисел (или над другим полем, например, полем комплексных чисел). Линейное пространство - это алгебраическая структура, удовлетворяющая некоторым определенным свойствам. В данном случае, множество целых чисел удовлетворяет основным свойствам линейного пространства.

1. Замкнутость относительно сложения: Если a и b - целые числа, то их сумма a + b также является целым числом.
2. Замкнутость относительно умножения на скаляр: Если a - целое число, а c - любое вещественное число, то произведение c ⋅ a также является целым числом.
3. Ассоциативность сложения: Для любых целых чисел a, b и c выполняется равенство (a + b)+c = a +(b + c).
4. Коммутативность сложения: Для любых целых чисел a и b выполняется равенство a + b=b + a.
5. Существование нулевого элемента: Существует целое число 0, такое что a + 0 = a для любого целого числа a.
6. Существование противоположного элемента относительно сложения: Для каждого целого числа a существует целое число −a, такое что a + (−a) = 0.

Таким образом, множество целых чисел удовлетворяет всем этим свойствам и, следовательно, является линейным пространством над полем вещественных чисел.

## Задание 8

Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

Решение

Для разложения вектора по базису запишем векторное уравнение:

Перепишем векторное уравнение в матричном виде и решим его методом Гаусса

Проверим образуют ли заданные вектора базис, для этого найдем определитель матрицы:

Для этого воспользуемся формулой для вычисления определителя матрицы 3 на 3

Так как определитель матрицы не равен нулю, то введеная система векторов является базисом.

Решим уравнение методом Гауса:

1-ую строку делим на -3

от 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 1

2-ую строку делим на

к 1 строке добавляем 2 строку, умноженную на

к 1 строке добавляем 3 строку, умноженную на 5; к 2 строке добавляем 3 строку, умноженную на 7

Ответ:

## Задание 9

**Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A**

**A =**

Из определения собственного вектора v соответствующего собственному значению λ: A\*v=λ\*v

Тогда: A\*v-λ\*v=(A-λ\*E)\*v=0

Уравнение имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда det(A-λ\*E)=0

det(A-λ\*E) =

λ1=1

λ2=3

Для каждого λ найдем его собственные вектора:

λ1=1

A-λ\*E =

A\*v=λ\*v

Тогда имеем однородную систему линейных уравнений, решим ее методом Гаусса:

1 1 0 0

1 1 0 0 🡪

-1 1 2 0

1 1 0 0

0 0 0 0 🡪

-1 1 2 0

1 1 0 0

0 0 0 0 🡪

0 2 2 0

1 1 0 0

0 2 2 0 🡪

0 0 0 0

1 1 0 0

0 1 1 0 🡪

0 0 0 0

1 0 -1 0

0 1 1 0

0 0 0 0

Из уравнения 2 системы (1) найдем переменную x2:

x2 = -x3

Из уравнения 1 системы (1) найдем переменную x1:

x1=x3

Ответ: x1=x3; x2=-x3; x3=x3